

ALGÈBRE LINÉAIRE - MATH111(F)

Semestre d'automne — 2024-2025

Série 11: Valeurs et vecteurs propres

Objectifs de cette série

À la fin de cette série vous devriez être capable de

- (O.1) continuer à **calculer le polynôme caractéristique, les valeurs et les espaces propres** d'une matrice carrée ;
- (O.2) **déterminer si une matrice est diagonalisable**, et la **diagonaliser** si possible ;
- (O.3) utiliser la diagonalisation pour **calculer des puissances** d'une matrice.

Nouveau vocabulaire dans cette série

- trace d'une matrice
- matrice diagonalisable
- diagonalisation d'une matrice
- multiplicité algébrique
- multiplicité géométrique



Noyau d'exercices

1.1 L'application trace

Exercice 1 (Définition et premières propriétés I)

Un peu de théorie

On rappelle que l'application $\text{Tr} : \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par

$$\text{Tr} \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,n} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n A_{i,i} = A_{1,1} + \cdots + A_{n,n}.$$

Elle est appelée l'**application trace**.

- (a) Montrer que Tr est une application linéaire.
- (b) Montrer que $\text{Tr}(A^T) = \text{Tr}(A)$ pour toute matrice $A \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$.

Pour le noyau :
items (a), (b) et
(d).

Plus difficile

- (c) Montrer que $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ pour toutes matrices $A, B \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$.
 (d) Montrer que $\text{Tr}(AB) \neq \text{Tr}(A)\text{Tr}(B)$ en général.

1.2 Multiplicités algébriques et géométriques

 Pour le noyau :
matrices A, B et C.

Exercice 2 (Calculs de valeurs et vecteurs propres)
 Considérons les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 5 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } E = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 17 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pour chacune des matrices précédentes, calculer le polynôme caractéristique, les valeurs propres et les vecteurs propres.

1.3 Diagonalisation et puissances de matrices

Exercice 3 (Diagonalisation d'une puissance I)

Soit P une matrice carrée inversible de taille n et D une matrice carrée diagonale de taille n . On pose $A = PDP^{-1}$. Montrer que $A^2 = PD^2P^{-1}$, et déduire une formule qui permet de calculer A^k pour tout entier $k \geq 2$.

Exercice 4 (Diagonalisation I)

Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

- (a) Calculer les valeurs propres de A .
 (b) Calculer les vecteurs propres de A .
 (c) Soit P la matrice dont les colonnes sont des vecteurs propres de A (associés à des valeurs propres différentes). Calculer $P^{-1}AP$, et interpréter le résultat.
 (d) Calculer A^{1000} .

 Pour le noyau :
matrices B et C.

Exercice 5 (Diagonalisation II)

Considérons les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \text{ et } D = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 4 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les matrices qui sont diagonalisables.

Pour le noyau :
matrices A , C et
 D .

Exercice 6 (Diagonalisation III)

Considérons les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ et } E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Indiquer celles qui sont diagonalisables (toujours en justifiant), et le cas échéant, diagonaliser ces matrices et exhiber les vecteurs propres.

Exercice 7 (Diagonalisation d'une application entre matrices)

Soit $\text{Sym}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées symétriques de taille 2, dont une base (ordonnée) est donnée par

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Soit $T : \text{Sym}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Sym}_2(\mathbb{R})$ l'application linéaire définie par

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a - d & -b \\ -b & -a + 2d \end{pmatrix}$$

pour tous $a, b, d \in \mathbb{R}$.

- Calculer les 3 valeurs propres (distinctes) $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ de T .
- Trouver un vecteur propre $M_i \in \text{Sym}_2(\mathbb{R})$ associé à chaque valeur propre λ_i . Montrer que $\mathcal{B}' = \{M_1, M_2, M_3\}$ est une base de $\text{Sym}_2(\mathbb{R})$.
- Écrire la représentation matricielle de T relative à la base $\mathcal{B}'$.
- Calculer $T^{10}(A)$, où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$



Pour compléter la pratique

2.1 L'application trace

Exercice 8 (QCM sur l'application trace)

Résoudre les QCM dans les items suivants, où chaque QCM n'admet qu'une seule réponse correcte.

- Le noyau de l'application $\text{Tr} : \mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ de dimension

☐ 1;

☐ 2;

☐ 3;

☐ 4.

(b) Le noyau de l'application $\text{Tr} : \mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ admet la base

- ☐ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\};$
- ☐ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\};$
- ☐ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\};$
- ☐ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$

2.2 Diagonalisation et puissances de matrices

Exercice 9 (Diagonalisation d'une puissance II)

Démontrer ou trouver un contre-exemple aux affirmations suivantes :

- (a) Si A est une matrice carrée de taille n diagonalisable, alors A^k est diagonalisable pour tout entier $k \geq 2$.
- (b) Si A est une matrice carrée de taille n et A^k est diagonalisable pour un entier $k \geq 2$, alors A est diagonalisable.

Exercice 10 (Valeurs propres de matrices diagonalisables de taille 2)

Existe-t-il une matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$$

avec $b \neq 0$, diagonalisable et ne possédant qu'une seule valeur propre de multiplicité 2 ?

Exercice 11 (V/F sur diagonalisation I)

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

- | | V | F |
|--|--------------------------|--------------------------|
| (a) Si A et B sont deux matrices semblables, alors elles ont les mêmes valeurs propres. | ☐ | ☐ |
| (b) Pour qu'une matrice de taille $n \times n$ soit diagonalisable il faut qu'elle ait au moins n valeurs propres distinctes. | ☐ | ☐ |
| (c) Si v_1 et v_2 sont deux vecteurs propres linéairement indépendants, alors leur valeurs propres associées sont différentes. | ☐ | ☐ |
| (d) Étant donné trois matrices A, B et C , si A est équivalente à B , et B est équivalente à C , alors A est équivalente à C . | ☐ | ☐ |

Exercice 12 (V/F sur diagonalisation II)

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

- | | V | F |
|--|--------------------------|--------------------------|
| (a) Un espace propre d'une matrice carrée A de taille n est l'espace nul d'une certaine matrice. | ☐ | ☐ |

- (b) Pour une matrice carrée A , si A^2 est la matrice nulle, alors la seule valeur propre de A est 0. ☐ ☐
- (c) Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont les éléments de sa diagonale principale. ☐ ☐
- (d) L'ensemble $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ des vecteurs propres associés aux valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ d'une matrice carrée A est linéairement dépendant. ☐ ☐

Exercice 13 (V/F sur diagonalisation III)

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

- | | V | F |
|---|--------------------------|--------------------------|
| (a) Une matrice $A \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ est diagonalisable si et seulement si elle possède n valeurs propres distinctes. | ☐ | ☐ |
| (b) Une matrice $A \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ est diagonalisable si elle possède n valeurs propres distinctes. | ☐ | ☐ |
| (c) Si une matrice $A \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ est diagonalisable, alors elle est inversible. | ☐ | ☐ |
| (d) Si une matrice $A \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ est inversible, alors elle est diagonalisable. | ☐ | ☐ |
| (e) Si 0 est une valeur propre d'une matrice $A \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, alors $\text{rang}(A) < n$. | ☐ | ☐ |
| (f) Étant donné $A, P \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ avec P inversible, $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de A si et seulement si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de $P^{-1}AP$. | ☐ | ☐ |

2.3 Diagonalisation dans le cas complexe

Le cas de B est difficile.

Exercice 14 (Diagonalisation complexe I)

Considérons les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 - \sqrt{3} & 1 + \sqrt{3} \\ 1 + \sqrt{3} & 1 & 1 - \sqrt{3} \\ 1 - \sqrt{3} & 1 + \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Calculer les valeurs propres complexes de A et de B .
- (b) Calculer les vecteurs propres complexes de A et de B .
- (c) Soit P et Q les matrices dont les colonnes sont des vecteurs propres de A et de B , respectivement (associés à des valeurs propres différentes). Calculer $P^{-1}AP$ et $Q^{-1}BQ$ et interpréter le résultat.

Exercice difficile.

Exercice 15 (Diagonalisation complexe II)

 Soit A une matrice de taille 3×3 à coefficients réels telle que $\lambda_1 = 4$ et $\lambda_2 = 2e^{i\pi/3}$ sont valeurs propres de A avec vecteurs propres

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

 respectivement. Calculer A .

Indication : On rappelle les identités

$$e^{i\pi/3} + e^{-i\pi/3} = 2 \frac{e^{i\pi/3} + e^{-i\pi/3}}{2} = 2 \cos(\pi/3) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1,$$

$$-ie^{i\pi/3} + ie^{-i\pi/3} = -i2 \frac{e^{i\pi/3} - e^{-i\pi/3}}{2} = 2 \sin(\pi/3) = 2 \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$